УДК 53(075)
ББК 22.3
Б61

Билеты письменных вступительных экзаменов в МФТИ (2000 г.): Методические разработки по физике и математике. — М.: МФТИ, 2000. — 46 с.
ISBN 5-7417-0166-3

Приведены задания, предлагавшиеся на вступительных экзаменах абитуриентам Московского физико-технического института в 2000 году. Все задачи снабжены ответами, часть — подробными решениями, некоторые — основными указаниями к решению. На выполнение каждой экзаменационной работы давалось 4,5 часа.

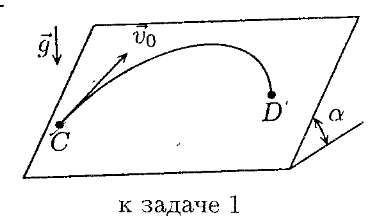
Для абитуриентов МФТИ и других физических вузов, а также преподавателей школ с углубленным изучением физики и математики.

УДК 53(075)
ББК 22.3

ISBN-5-7417-0166-3

ФИЗИКА

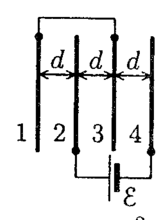
БИЛЕТ 1



к задаче 1

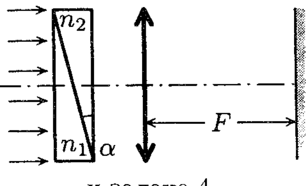
1. Монета скользит по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α и имеет в точке C скорость v_0 (см. рис.). Через некоторое время монета оказалась в точке D наклонной плоскости, пройдя путь S и поднявшись по вертикали на высоту H. Коэффициент трения скольжения между монетой и наклонной плоскостью μ. Найти скорость монеты в точке D.

2. В вертикально расположенной тонкой трубке длиной $3L = 840$ мм с открытым в атмосферу верхним концом, столбиком ртути длиной $L = 280$ мм заперт слой воздуха длиной L. Какой максимальной длины слой ртути можно долить сверху в трубку, чтобы она из трубки не выливалась? Внешнее давление $P_0 = 770$ мм рт. ст.



к задаче 3

3. Сложный воздушный конденсатор состоит из четырех пластин, удерживаемых на равных расстояниях d друг от друга. Пластины 1 и 3 закорочены. Пластины 2 и 4 подсоединены к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$. Определить силу, действующую со стороны электрического поля на пластину 3. Площадь каждой пластины — S, а расстояние между ними много меньше размеров пластин.



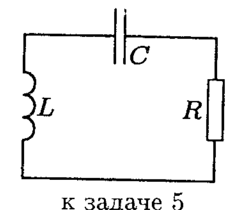
к задаче 4

4. Плоскопараллельная пластина составлена из двух стеклянных клиньев с малым углом $\alpha = 5°$ Показатель преломления клиньев $n_1 = 1{,}48$, $n_2 = 1{,}68$. На пластину нормально ее поверхности падает параллельный пучок света. За пластиной расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 60$ см. На экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, наблюдается светлая точка. На

сколько сместится эта точка на экране, если убрать пластинку?

Указание: для малых углов x справедливо $\sin x \approx x$.

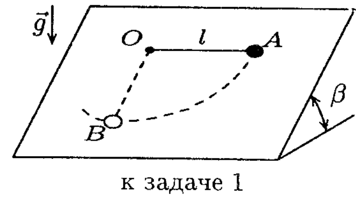
5. Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием, изображенном на рисунке, индуктивность катушки быстро (по сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину ΔL ($\Delta L \ll L$) каждый раз, когда ток в цепи равен нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, также быстро возвращают в исходное состояние. Определить величину ΔL, если $L = 0{,}15$ Гн, $C = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$ Ф, $R = 20$ Ом.



к задаче 5

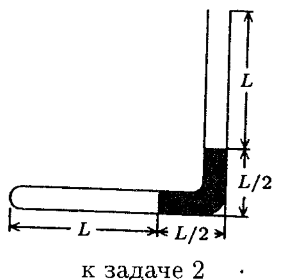
БИЛЕТ 2

1. Небольшая шайба на нити длиной l может вращаться вокруг неподвижной оси O, скользя по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту β. Шайбу поместили в точку A наклонной плоскости, соответствующую горизонтальному положению нити, и отпустили. Определить скорость шайбы в точке B — самой низкой точке траектории. Коэффициент трения скольжения шайбы о наклонную плоскость μ. Нить всегда параллельна наклонной плоскости и не задевает ее.



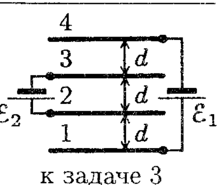
к задаче 1

2. Имеется Г-образная тонкая трубка постоянного внутреннего сечения и общей длиной $3L = 1260$ мм. Между слоем воздуха длиной $L = 420$ мм и атмосферой находится слой ртути той же длины L (см. рис.). Какой длины слой ртути останется в трубке, если вертикальное колено повернуть на 180°, расположив его открытым концом вниз? Внешнее давление $P_0 = 735$ мм рт. ст.



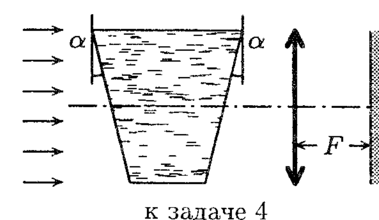
к задаче 2

3. Четыре проводящие пластины удерживают напротив друг друга. Расстояние между соседними пластинами d. Пластины 1 и 4 подсоединены к источнику с ЭДС $\mathcal{E}_1$, пластины 2 и 3 подсоединены к источнику с ЭДС $\mathcal{E}_2$. Определить силу, действующую на пластину 2 со стороны электрического поля. Площадь каждой пластины S, а расстояние между ними много меньше размеров пластин.



к задаче 3

4. Стеклянный трапецеидальный сосуд с малым углом $\alpha = 6°$ заполнен водой с показателем преломления $n = 1{,}33$. На сосуд падает параллельный пучок света. За сосудом расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 50$см. На экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, наблюдается светлая точка. На сколько сместится эта точка на экране, если убрать сосуд? Указание: для малых углов x справедливо $\sin x \approx x$.



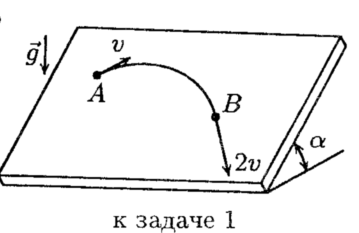
к задаче 4

5. Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием, изображенном на рисунке, емкость конденсатора быстро (по сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину ΔC ($\Delta C \ll C$) каждый раз, когда напряжение на нем равно нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, также быстро возвращают в исходное состояние. Определить величину ΔC, если $L = 0{,}1$ Гн, $C = 10^{-7}$ Ф, $R = 30$ Ом.

к задаче 5


БИЛЕТ 3

1. Широкая доска наклонена под углом α к горизонту (см. рис.). Небольшой шайбе сообщили в точке A доски скорость v, направленную вдоль нее. Через некоторое



к задаче 1

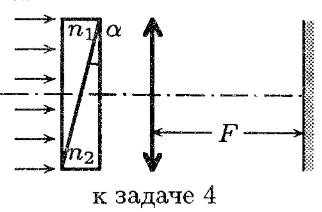
время шайба оказалась в точке B, сместившись по вертикали на H вниз и имея скорость $2v$. Какой путь прошла шайба между точками A и B? Коэффициент трения скольжения шайбы о доску μ.

2. В вертикально расположенной трубке постоянного внутреннего сечения и длиной $3L = 1080$ мм с открытым в атмосферу верхним концом, столбиком ртути длиной $L = 360$ мм заперт слой воздуха тоже длиной L. Какой длины столб ртути останется в трубке, если ее перевернуть открытым концом вниз? Внешнее давление $P_0 = 774$ мм рт. ст.

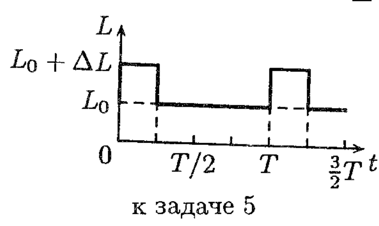
3. Сложный воздушный конденсатор состоит из четырех пластин, удерживаемых неподвижно. Расстояние между соседними пластинами d. Пластины 2 и 4 закорочены. Пластины 1 и 3 подсоединены к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$. Определить силу, действующую на пластину 3 со стороны электрического поля. Площадь каждой пластины S, а расстояние между ними много меньше размеров пластин.

к задаче 3

4. Плоскопараллельная пластинка составлена из двух стеклянных клиньев с малым углом α. Показатели преломления клиньев $n_1 = 1{,}53$, $n_2 = 1{,}73$. На пластинку нормально ее поверхности падает параллельный пучок света. За пластинкой расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 50$ см. На экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, наблюдается светлая точка. Если убрать пластинку, то эта точка смещается на экране на $H = 10$ мм. Определить величину угла α.



к задаче 4



к задаче 5

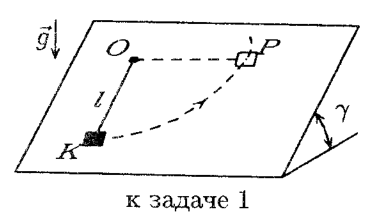
У к а з а н и е: для малых углов x справедливо $\sin x \approx x$.

5. Для поддержания незатухающих колебаний тока в колебательном LCR контуре с периодом колебаний $T = 10^{-3}$с индуктивность L контура периодически изменяют во времени по закону, представленному на рисунке ($\Delta L / L_0 \ll 1$). При каком максимальном значении сопротивления R колебания в контуре не будут затухать, если $\Delta L = 3 \cdot 10^{-2}$ Гн?

У к а з а н и е: уменьшение индуктивности происходит при максимальном токе в контуре.

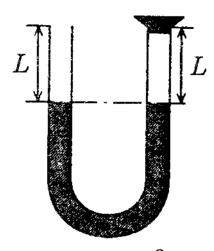
БИЛЕТ 4

1. На нити длиной l вокруг неподвижной оси O может вращаться небольшой брусок, скользя по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту γ (см. рис.). Брусок поместили в самую низкую для него точку K (нить наклонена под углом γ к горизонту). Какую скорость надо сообщить бруску в точке K, вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно нити, чтобы он достиг точки P (при горизонтальном положении нити), имея втрое меньшую скорость? Коэффициент трения скольжения бруска о наклонную плоскость μ. Нить всегда параллельна наклонной плоскости и не задевает ее.



к задаче 1

2. U-образная тонкая трубка постоянного внутреннего сечения с вертикально расположенными коленами заполняется ртутью так, что в каждом из открытых колен остается слой воздуха длиной $L = 320$ мм (см. рис.). Затем правое колено закрывается пробкой. Какой максимальной длины слой ртути можно долить в левое колено, чтобы она не выливалась из трубки? Внешнее давление $P_0 = 720$ мм рт. ст.



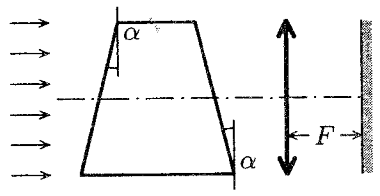
к задаче 2

3. Сложный воздушный конденсатор состоит из четырех пластин, удерживаемых неподвижно. Расстояние между соседними пластинами d. Пластины 1 и 4 закорочены. Пластины 2 и 3 подсоединены к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$. Опре-

к задаче 3

делить силу, действующую на пластину 4 со стороны электрического поля. Площадь каждой пластины S, а расстояние между ними много меньше размеров пластин.

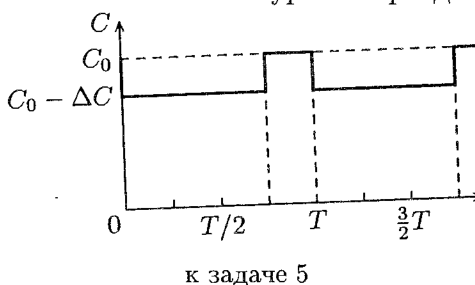
4. На стеклянный трапецеидальный сосуд с углом наклона $\alpha = 6°$ падает параллельный пучок света. За сосудом расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 45$ см. На экране, находящемся в фокальной плоскости линзы, наблюдается светлая точка. После заполнения сосуда глицерином светлая точка смещается на экране на $H = 44{,}3$ мм. Определить показатель преломления глицерина.



к задаче 4

Указание: для малых углов x справедливо $\sin x \approx x$.

5. Для поддержания незатухающих колебаний в колебательном LCR контуре с периодом колебаний $T = 2 \cdot 10^{-4}$с емкость C контура периодически изменяют во времени по закону, представленному на рисунке ($\Delta C/C_0 \ll 1$). При каком максимальном значении сопротивления R колебания в контуре не будут затухать, если $L = 8 \cdot 10^{-2}$ Гн, $\Delta C/C_0 = 8 \cdot 10^{-2}$.

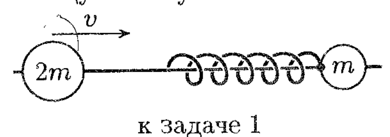


к задаче 5

Указание: уменьшение емкости конденсатора происходит при максимальном заряде на конденсаторе.

БИЛЕТ 5

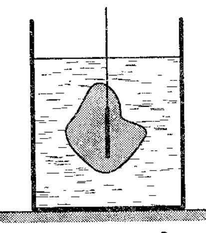
1. Шары насажены на прямолинейную горизонтальную спицу и могут скользить по ней без трения (см. рис.). К шару массой m прикреплена легкая пружина жесткостью K и он покоится. Шар массой $2m$ движется со скоростью v. Радиусы шаров



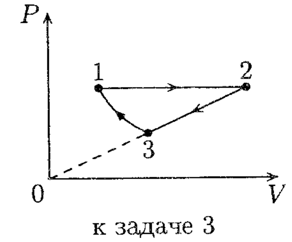
к задаче 1

много меньше длины пружины. 1. Определить скорость шара массой $2m$ после отрыва от пружины. 2. Определить время контакта шара массой $2m$ с пружиной.

2. В цилиндрическом стакане с водой на нити висит проволока, вмороженная в кусок льда. Лед с проволокой целиком погружен в воду и не касается стенок и дна стакана (см. рис.). После того как лед растаял, проволока осталась висеть на нити, целиком погруженная в воду. Уровень воды в стакане за время таяния льда уменьшился на ΔH ($\Delta H > 0$), а сила натяжения нити увеличилась в K раз. Найти объем проволоки. Плотность воды $\rho_в$, проволоки — ρ, площадь внутреннего сечения стакана S.


к задаче 2

3. Газообразный гелий находится в цилиндре под подвижным поршнем. Газ нагревают при постоянном давлении, переводя его из состояния 1 в состояние 2 (см. рис.). При этом газ совершает работу A_{12}. Затем газ сжимается в процессе 2–3, когда его давление P прямо пропорционально объему V. При этом над газом совершается работа A_{23} ($A_{23} > 0$). Наконец, газ сжимается в адиабатическом процессе 3–1, возвращаясь в первоначальное состояние. Найти работу сжатия A_{31}, совершенную над газом в адиабатическом процессе.



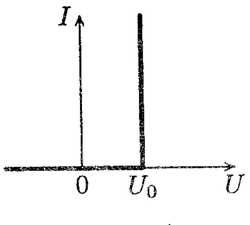
к задаче 3

4. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью $C = 100$ мкФ не заряжен.



к задаче 4

Вольтамперная характеристика диода D изображена на следующем рисунке. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 6$ В, пороговое напряжение диода $U_0 = 1$ В, $R = 1$ кОм. 1. Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? 2. Какой заряд протечет через диод после замыкания ключа?



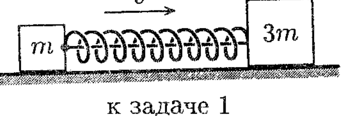
к задаче 4

3. Какое количество теплоты выделится на резисторе R после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

5. Точечный источник света расположен на главной оптической оси слева от линзы с фокусным расстоянием $F_1 = -10$см. Расстояние от источника до рассеивающей линзы $d = 40$ см. На расстоянии $L = 20$ см слева от рассеивающей линзы расположена собирающая линза. Главные оптические оси линз совпадают. Найти фокусное расстояние собирающей линзы, если из системы линз выходит параллельный пучок света.

БИЛЕТ 6

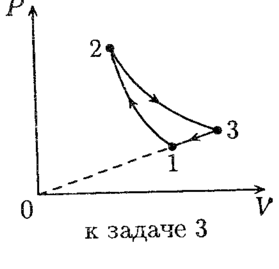
1. По гладкой горизонтальной поверхности стола движутся с постоянной скоростью v два бруска массами m и $3m$, связанные нитью. Между брусками находится пружина жесткостью K, сжатая на величину X_0 (см. рис.). Пружина прикреплена только к бруску массой m. Размеры брусков малы по сравнению с длиной нити, массой пружины пренебречь, скорость брусков направлена вдоль нити. Во время движения нить обрывается и бруски разъезжаются вдоль начального направления нити. 1. Найти скорость бруска массой $3m$ после его отделения от пружины. 2. Найти время соприкосновения пружины с бруском массой $3m$, считая от момента разрыва нити.



к задаче 1

2. Гайка, вмороженная в кусок льда, висит на нити. После того как снизу поднесли цилиндрический стакан с водой, в которую целиком погрузили лед с гайкой, сила натяжения нити уменьшилось на ΔT ($\Delta T > 0$), а уровень воды в стакане повысился. Лед с гайкой при этом висит на нити в воде и не касается стенок и дна стакана. После того как лед растаял, гайка осталась висеть на нити, целиком погруженная в воду, а уровень воды в стакане за время таяния льда понизился на ΔH ($\Delta H > 0$). Чему равен объем гайки? Плотность воды $\rho_в$, льда — $\rho_л$, площадь внутреннего сечения стакана S, ускорение свободного падения g.

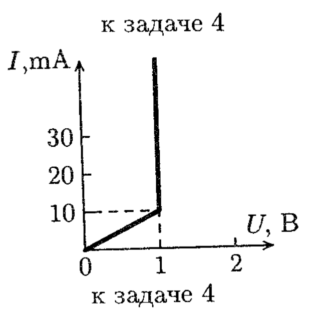
3. Газообразный гелий находится в цилиндре под подвижным поршнем. Газ сжимают в адиабатическом процессе, переводя его из состояния 1 в состояние 2 (см. рис.). Над газом совершается при этом работа сжатия A_{12} ($A_{12} > 0$). Затем газ расширяется в изотермическом процессе 2–3, и, наконец, из состояния 3 газ переводят в состояние 1 в процессе, когда его давление P прямо пропорционально объему V. Найти работу A_{23}, которую совершил газ в процессе изотермического расширения, если во всем замкнутом цикле 1–2–3–1 он совершил работу A.



к задаче 3

4. В схеме, изображенной на рисунке, конденсатор емкостью $C = 100$ мкФ, заряженный до напряжения $U_0 = 5$ В, подключается через диод D к резистору с сопротивлением $R = 100$ Ом.

Вольтамперная характеристика диода изображена на следующем рисунке. В начальный момент ключ K разомкнут. Затем ключ замыкают. 1. Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? 2. Чему равно напряжение на конденсаторе, когда ток в цепи будет равен 10 mA? 3. Какое количество теплоты выделится на диоде после замыкания ключа?

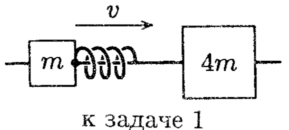


к задаче 4

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = -30$ см слева от нее на расстоянии $d = 70$ см. На каком расстоянии от рассеивающей линзы надо поместить справа от нее тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_2 = 50$ см, чтобы из системы выходил параллельный пучок света? Главные оптические оси линз совпадают.

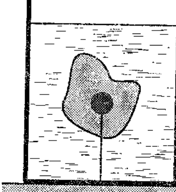
БИЛЕТ 7

1. Вдоль прямолинейной горизонтальной спицы могут скользить без трения две муфты. Муфта массой m с прикрепленной к ней легкой пружиной жесткостью K движется со скоростью v (см. рис.). Муфта массой $4m$ покоится. Размеры муфт намного меньше длины пружины. 1. Определить скорость муфты массой $4m$ после отрыва от пружины. 2. Определить время контакта муфты массой $4m$ с пружиной.

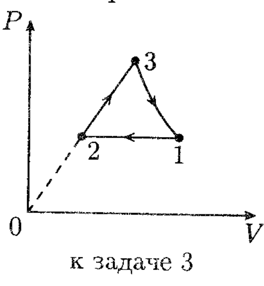


к задаче 1

2. Деревянный шарик, вмороженный в кусок льда, удерживается внутри цилиндрического стакана с водой нитью, прикрепленной ко дну (см. рис.). Лед с шариком целиком погружен в воду и не касается стенок и дна стакана. После того как лед растаял, шарик остался плавать внутри стакана, целиком погруженный в воду. Сила натяжения нити за время таяния льда уменьшилось при этом в K раз ($K > 1$), а уровень воды в стакане уменьшился на ΔH ($\Delta H > 0$). Чему равен объем шарика, если плотность воды равна $\rho_в$, дерева — ρ ($\rho < \rho_в$), площадь внутреннего сечения стакана S.


к задаче 2

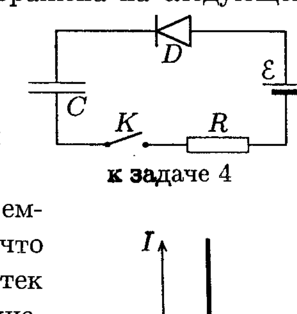
3. Газообразный гелий находится в цилиндре под подвижным поршнем. Газ охлаждают при постоянном давлении, переводя его из состояния 1 в состояние 2 (см. рис.). При этом от газа отводится количество теплоты Q ($Q > 0$). Затем газ расширяется в процессе 2–3, когда его давление P прямо пропорционально объему V, совершая работу A_{23}. Наконец, газ расширяется в адиабатическом процессе 3–1. Найти работу A_{31}, совершенную газом в процессе адиабатического расширения.



к задаче 3

4. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор C не заряжен. Вольт-

амперная характеристика диода D изображена на следующем рисунке. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 3$ В, пороговое напряжение диода $U_0 = 1$ В, $R = 2$ кОм. Ключ K замыкают. В установившемся режиме ток в цепи равен нулю. 1. Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? 2. Чему равна емкость конденсатора C, если известно, что после замыкания ключа через диод протек заряд $q = 4 \cdot 10^{-4}$ Кл? 3. Какое количество теплоты выделится на резисторе R после замыкания ключа. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



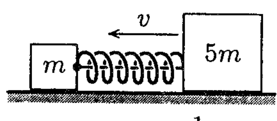
к задаче 4

к задаче 4

5. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см слева от линзы помещен точечный источник света на расстоянии $d = 30$ см от линзы. На каком расстоянии от собирающей линзы надо поместить справа от нее тонкую рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $F_2 = -10$ см, чтобы из системы линз вышел параллельный пучок света? Главные оптические оси линз совпадают.

БИЛЕТ 8

1. Бруски с массами m и $5m$ связаны нитью, длина которой много больше размеров брусков. Между брусками вставлена сжатая на величину X_0 и прикрепленная только к бруску массой $5m$ легкая пружина жесткостью K (см. рис.). Система движется по гладкой горизонтальной поверхности стола вдоль горизонтально натянутой нити со скоростью v. Нить разрывается, и бруски разъезжаются вдоль начального направления нити. 1. Найти скорость бруска массой m после его отделения от пружины. 2. Найти время соприкосновения бруска массой m с пружиной, считая от момента разрыва нити.

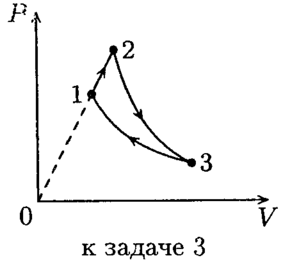


к задаче 1

2. Болт, вмороженный в кусок льда, висит на нити. После того как снизу поднесли цилиндрический стакан с водой,

в которую целиком погрузили лед с болтом, сила натяжения нити уменьшилось на ΔT ($\Delta T > 0$). При этом лед с болтом не касались дна и стенок стакана. Спустя некоторое время лед растаял, а болт остался висеть на нити, целиком погруженный в воду. При этом уровень воды в стакане увеличился на ΔH по сравнению с уровнем воды в стакане до опускания в него льда с болтом. Найти объем болта. Плотность воды $\rho_в$, льда — $\rho_л$, площадь внутреннего сечения стакана S, ускорение свободного падения g.

3. Газообразный гелий находится в цилиндре под подвижным поршнем. Газ расширяется в процессе 1–2, когда его давление P прямо пропорционально объему V (см. рис.). Затем газ расширяется в адиабатическом процессе 2–3, совершая работу A_{23}. Наконец газ сжимается в изотермическом процессе 3–1, при этом от него отводится количество теплоты Q_{31} ($Q_{31} > 0$). Какую работу совершил газ во всем замкнутом цикле 1–2–3–1?



к задаче 3

4. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор C заряжен до напряжения $U_0 = 6$ В. Вольтамперная характеристика диода D изображена на следующем рисунке. Сопротивление резистора $R = 125$ Ом. Ключ K замыкают. 1. Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? 2. Чему равно напряжение на конденсаторе, когда ток в цепи равен $I_1 = 8$ mA? 3. Чему равна емкость конденсатора, если известно, что после замыкания ключа на диоде выделилось количество теплоты $Q = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ Дж?

к задаче 4

к задаче 4

5. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 30$ см слева от нее помещен

точечный источник света на расстоянии $d = 50$ см от линзы. Между источником и собирающей линзой помещают рассеивающую линзу. Расстояние между линзами $L = 20$ см. Главные оптические оси линз совпадают. Найти фокусное расстояние рассеивающей линзы, если известно, что из системы линз вышел параллельный пучок света.

МАТЕМАТИКА

БИЛЕТ 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} - 2xy = 16, \\ \dfrac{y^3}{2x} + 3xy = 25. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x} = 16\cos 4x(1 + 2\cos 4x) + \frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_2 2x| - 2} \leqslant \frac{1}{|\log_4 x^2| - 1}.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A, B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D. Найти радиус окружности, если $CD = 4$, $BD = 5$.

5. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{4x}(1 + ax) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 12, $\angle ADB = 2\,\mathrm{arctg}(3/4)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

БИЛЕТ 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^4}{y^2} + xy = 72, \\ \dfrac{y^4}{x^2} + xy = 9. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 9x}{\sin^2 x} = 16\,\mathrm{ctg}\,2x \sin 10x + \frac{\cos^2 9x}{\cos^2 x}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_2(x/2)| - 3} \leqslant \frac{1}{|\log_8 x^3| - 2}.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A, B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D. Найти длину отрезка CD, если $\angle ABC = 2\arcsin(1/5)$, а радиус окружности $R = 5$.

5. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{2x}(1 - ax) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 6, угол между боковыми гранями равен $\arccos(1/10)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

БИЛЕТ 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{2y} + 3xy = 25, \\ \dfrac{y^3}{x} - 2xy = 16. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 5x}{\sin^2 x} = 24\cos 2x + \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 x}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_3 9x| - 3} \leqslant \frac{1}{|\log_9 x^2| - 1}.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A, B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D. Найти радиус окружности, если $AC = 3$, $CD = 2$.

5. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{9x}(1 + ax) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 3, угол между основанием и боковой гранью равен $\arccos(\sqrt{3}/4)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

БИЛЕТ 4

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{3y}{4x} = 2, \\ \dfrac{8y}{x^2} - \dfrac{6x}{y} = 5. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} = 8\cos 4x + \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_{27} x^3| - 2} \leqslant \frac{1}{|\log_3(x/3)| - 1}.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A, B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D.

Найти радиус окружности, если $\angle ABC = 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}/4)$, $CD = 8$.

5. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{x-1}(x - a) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 12, высота пирамиды $DO = \sqrt{33}$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

БИЛЕТ 5

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{|x^2 - 7x + 6| - |x^2 - x - x|} \geqslant 0.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos 2x \cos 3x} + \frac{\sin x}{\cos 3x \cos 4x} = \sin 4x - \mathrm{tg}\, 2x.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\log_3^2(x + 2y) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 2y)\log_{\frac{1}{3}}(x - y) + \log_3^2(x - y), \\ x^2 + xy - 2y^2 = 9. \end{cases}$$

4. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A. Прямая l касается окружности C_1 в точке B, а окружности C_2 — в точке D. Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке F, а другая касается окружностей C_1 и C_2 и пересекает прямую l в точке E. Найти радиусы окружностей C_1 и C_2, если $AF = 3\sqrt{2}$, $BE = \sqrt{5}$.

5. Найти все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x - 9} = ax + 7a - 3$ имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ угол ADC равен $2\arcsin\left(\frac{1}{6}\right)$, сторона основания ABC равна 2. Точки K, M, N — середины ребер AB, CD, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке KM и $3ME = KE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку KM. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$.

БИЛЕТ 6

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{|x^2-6x+5|-|x^2-2x-3|} \leqslant 0.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos 2x \cos 5x} + \frac{\sin 3x}{\cos 5x \cos 8x} = \sin 8x - \operatorname{tg} 2x.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2^2(x+y) + \log_{\frac{1}{2}}(x+y)\log_{\frac{1}{2}}(x-2y) = 2\log_2^2(x-2y), \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4. \end{cases}$$

4. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A. Прямая l касается окружности C_1 в точке B, а окружности C_2 — в точке D. Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке E, а другая касается окружностей C_1 и C_2 и пересекает l в точке F. Найти радиусы окружностей C_1 и C_2, если $AB = 4$, $EF = \sqrt{10}$.

5. Найти все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x-9} = 3 - ax - 7a$ имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ угол ADB равен $2\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$, сторона основания ABC равна 2. Точки K, M, N — середины отрезков AB, DK, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке CM и $3ME = CE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку CM. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$.

БИЛЕТ 7

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2-6x-5}}{|x^2+x-2|-|x^2+7x+6|} \geqslant 0.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos 6x \cos 7x} + \frac{\sin x}{\cos 7x \cos 8x} = \sin 8x - \operatorname{tg} 6x.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3^2(x+2y) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2y)\log_{\frac{1}{3}}(x-y) = 2\log_3^2(x-y), \\ x^2 + xy - 2y^2 = 4. \end{cases}$$

4. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A. Прямая l касается окружности C_1 в точке B, а окружности C_2 — в точке D. Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке F, а другая касается окружностей C_1 и C_2 и пересекает прямую l в точке E. Найти радиусы окружностей C_1 и C_2, если $AE = 3$, $AF = 4\sqrt{3}$.

5. Найти все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x-8} = ax - 3a - 2$ имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ длина бокового ребра равна 12, а угол между основанием ABC и боковой гранью равен $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{105}}\right)$. Точки K, M, N — середины ребер AB, CD, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке KM и $2ME = KE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку KM. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$.

БИЛЕТ 8

1. Решить неравенство
$$\frac{\sqrt{-x^2-2x+3}}{|x^2+2x-3|-|x^2+6x+5|} \leqslant 0.$$

2. Решить уравнение
$$\frac{\sin x}{\cos 4x \cos 5x} + \frac{\sin x}{\cos 5x \cos 6x} = \sin 6x - \operatorname{tg} 4x.$$

3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2\log_2^2(x+y) = \log_{\frac{1}{2}}(x+y)\log_{\frac{1}{2}}(x-2y) + \log_2^2(x-2y), \\ x^2 - xy - 2y^2 = 9. \end{cases}$$

4. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A. Прямая l касается окружности C_1 в точке B, а окружности C_2 — в точке D. Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке E, а другая касается окружностей C_1 и C_2 и пересекает l в точке F. Найти радиусы окружностей C_1 и C_2, если $AE = 1$, $EF = 3/\sqrt{2}$.

5. Найти все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x-8} = -ax + 3a + 2$ имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 4, угол между плоскостью основания и боковой гранью равен $\arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$. Точки K, M, N — середины отрезков AB, DK, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке CM и $5ME = CE$. Через точку E проходит плоскость $\mathcal{P}$ перпендикулярно отрезку CM. В каком отношении плоскость $\mathcal{P}$ делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ и расстояние от точки N до плоскости $\mathcal{P}$.

ФИЗИКА

БИЛЕТ 1

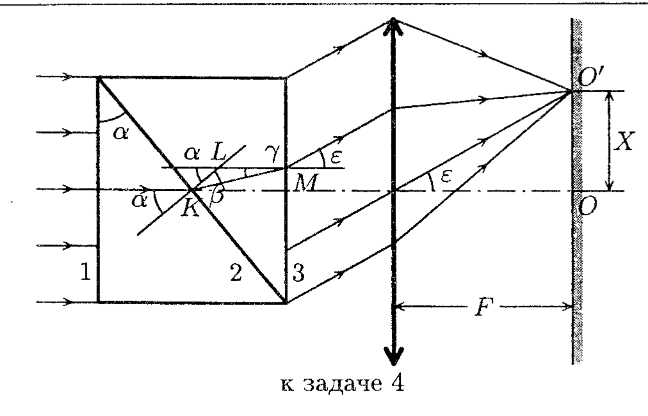
1. Рассмотрим силы, действующие на монету при ее движении по наклонной плоскости. Это — сила $\overrightarrow{mg}$, направленная вертикально вниз, $\overrightarrow{N}$ — сила реакции, перпендикулярная наклонной плоскости и $\overrightarrow{F}_{\text{тр}}$ — сила трения, лежащая на этой плоскости и в любой момент времени направленная в сторону, противоположную скорости движения монеты $\vec{v}$. Сила реакции
$$N = mg\cos\alpha$$
и работы не совершает. Запишем закон сохранения энергии
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgH - \mu mg\cos\alpha\cdot S.$$
Здесь $A = \mu mg\cos\alpha\cdot S$ — работа против силы трения. Отсюда
$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g(H + \mu S\cos\alpha)}.$$

2. Ясно, что при доливании ртути сверху в пробирку столбик ртути сожмет запертый воздух на величину x. Тогда количество долитой в пробирку ртути равно $L + \text{x}$, а длина воздушного столбика равна $L - \text{x}$. Так как температура во время опыта не изменилась, то согласно закону Бойля–Мариотта
$$P_{\text{в}0}LS = P_{\text{в}1}(L-x)S,$$
где $P_{\text{в}0,1}$ — давления в воздушной пробке до и после эксперимента, а S — площадь сечения пробирки. Если P_0 — внешнее атмосферное давление, то
$$P_{\text{в}0} = P_0 + \rho gL \quad \text{и} \quad P_{\text{в}1} = P_0 + \rho g(2L + x).$$
Будем решать полученное уравнение в мм рт. ст. Тогда $P_0 = 11/4L$, а
$$P_{\text{в}0} = P_0 + L \quad \text{и} \quad P_{\text{в}1} = P_0 + (2L + x).$$
Подставляя $P_{\text{в}0}$ и $P_{\text{в}1}$ в исходное уравнение, получим
$$(P_0 + L)L = (P_0 + 2L + x)(L - x).$$
Отсюда
$$x = \frac{1}{4}L = 70 \text{ мм}.$$
Окончательно для длины столбика ртути, долитой в пробирку

находим
$$L + x = 350 \text{ мм}.$$

3. Из закона сохранения заряда следует, что суммарный заряд пластин 1, 3 и пластин 2, 4 равен нулю:
$$q_1 + q_3 = 0; \qquad q_2 + q_4 = 0.$$
Отсюда
$$q_3 = -q_1 \quad \text{и} \quad q_4 = -q_2.$$
Обозначим через E_1 и E_2 — напряженности электрических полей, создаваемых зарядами пластин 1, 3 и 2, 4, которые равны
$$E_1 = \frac{q_1}{S\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{q_2}{S\varepsilon_0}.$$
Разность потенциалов между пластинами 1, 3 равна нулю, а между пластинами 2, 4 — $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ — ЭДС батареи). Согласно принципу суперпозиции электрических полей
$$E_1 d + (E_1 + E_2)d = 0; \qquad E_2 d + (E_1 + E_2)d = \mathcal{E}.$$
Решая систему уравнений, находим
$$E_1 = -\frac{\mathcal{E}}{3d}; \qquad E_2 = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}}{d}.$$
Заряд третьей пластины равен
$$q_3 = -\frac{\mathcal{E}S\varepsilon_0}{3d}.$$
Этот заряд находится в поле пластины 1, равном $\frac{E_1}{2}$, и поле, создаваемом пластинами 2, 4 — E_2. Таким образом, сила, действующая на пластину 3, равна
$$F = q_3\left(\frac{E_1}{2} + E_2\right) = \frac{\mathcal{E}^2}{6d^2}S\varepsilon_0.$$

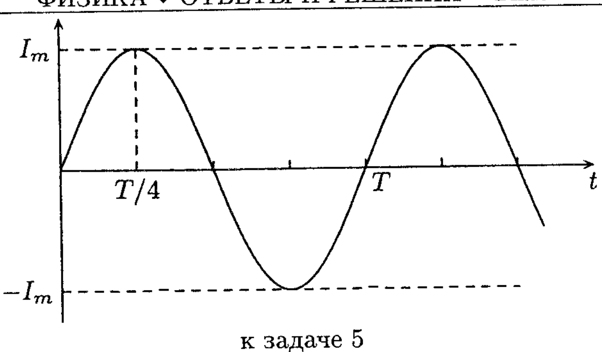
4. При нормальном падении лучей на границу 1 последние не изменяют своего направления. На границе 2 лучи преломляются так, что
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}.$$
Принимая во внимание малость углов, имеем
$$\frac{\alpha}{\beta} \approx \frac{n_2}{n_1}.$$
При выходе из пластины (поверхность 3)



к задаче 4

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\varepsilon} = \frac{1}{n_2} \quad \text{или} \quad \frac{\gamma}{\varepsilon} \approx \frac{1}{n_2}$$
(см. рис.). Рассмотрим треугольник KLM. Ясно, что
$$\alpha = \gamma + \beta = \frac{\varepsilon}{n_2} + \alpha\frac{n_1}{n_2}.$$
Здесь ε — угол выхода лучей из пластины, равный
$$\varepsilon = \alpha(n_2 - n_1).$$
При наклонном падении на линзу параллельного пучка последний фокусируется в фокальной плоскости линзы в точке O' на расстоянии X от главной оптической оси линзы. Из геометрии рисунка видно, что
$$X = OO' = F\,\mathrm{tg}\,\varepsilon \approx F\varepsilon = F\alpha(n_2 - n_1) \approx 10{,}5 \text{ мм}.$$

5. Так как сопротивление контура мало, то колебания, возникающие в контуре, можно считать почти синусоидальными, так что за период колебаний потери энергии достаточно малы. Тогда период колебаний определяется по формуле Томсона (см. рис.):
$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$
Индуктивность изменяется через время $t = T/2 = \pi\sqrt{LC}$. При изменении индуктивности на величину ΔL в силу сохранения магнитного потока
$$I_{\text{т}}L = (L + \Delta L)I = \Phi.$$
Здесь $I_{\text{т}}$ — амплитуда тока в контуре. Начальная энергия, за-



к задаче 5

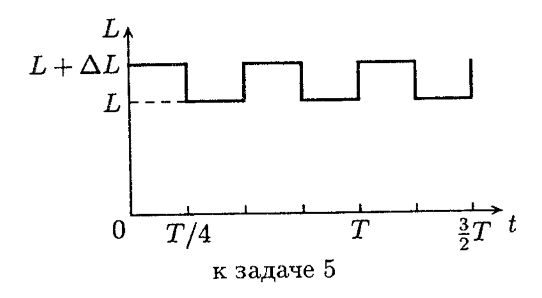
пасенная в контуре, равна

$$W_1 = \frac{\Phi^2}{2(L+\Delta L)},$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий катушку индуктивности. В момент уменьшения индуктивности на величину ΔL энергия, запасенная в катушке, увеличилась и равна

$$W_2 = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Изменение энергии равно



к задаче 5

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{\Phi^2}{2}\,\frac{\Delta L}{L(L+\Delta L)} \approx \frac{\Phi^2 \Delta L}{2L^2}.$$

За время $t = T/2$ в контуре происходят потери энергии, выделяющейся в виде тепла на резисторе с сопротивлением R, равные

$$W_{\text{потерь}} = I^2_{\text{эф}} R \frac{T}{2}.$$

Для поддержания в контуре незатухающих колебаний требуется скомпенсировать эти потери за счет увеличения энергии, запасенной в катушке индуктивности. Следовательно,

$$\Delta W \geqslant W_{\text{потерь}} \quad \text{или} \quad \frac{I^2_{\text{т}}\Delta L}{2} \geqslant \frac{I^2_{\text{т}} R\pi\sqrt{LC}}{2}.$$

Откуда

$$\Delta L \geqslant \pi R\sqrt{LC} \approx 9{,}4 \cdot 10^{-3}\text{Гн}.$$

БИЛЕТ 2

1. $v = \sqrt{gl(2\sin\beta - \mu\pi\cos\beta)}$.
2. $x = \frac{3}{4}L = 315$ мм.
3. $F = \frac{(3\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)}{8d^2} S\varepsilon_0$.
4. $\Delta x = 2\alpha(n-1) = 3{,}45$ см.
5. $\Delta C = \frac{\pi RC}{\sqrt{L/C}} \approx 9{,}4 \cdot 10^{-9}$ Ф.

БИЛЕТ 3

1. $S = \frac{2gH - 3v^2}{2\mu g\cos\alpha}$.
2. $x = \frac{3L}{4} = 270$ мм.
3. $F = 0$.
4. $\alpha = \frac{H}{(n_2 - n_1)F} = 0{,}1$ рад.
5. $R \leqslant \frac{\Delta L}{T} = 30$ Ом.

БИЛЕТ 4

1. $v = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{gl}{2}(2\sin\gamma + \mu\pi\cos\gamma)}$.
2. $x = 80$ мм, $L + x = 400$ мм. $\left(x^2 - \left(\frac{P_0}{\rho g} + 2L\right)x + L^2 = 0\right)$.
3. $F = \frac{\mathcal{E}^2}{8d^2} S\varepsilon_0$.
4. $n = 1 + \frac{H}{2\alpha F} = 1{,}47$.
5. $R \leqslant LT\frac{\Delta C}{C_0} = 32$ Ом.

БИЛЕТ 5

1. 1) $v_1 = \frac{v}{3}$; 2) $t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{2m}{3K}}$.

2. $v_п = \frac{k}{k-1} S\Delta H \frac{\rho_в}{\rho_п - \rho_в}$.

3. $A_{31} = 3A_{23} - \frac{3}{2} A_{12}$.

4. 1) $I_0 = (\mathcal{E} - U_0)/R = 5 \cdot 10^{-3}$ А; 2) $Q_C = C(\mathcal{E} - U_0) = 5\cdot 10^{-4} k$; 3) $W_R = A_\mathcal{E} - W_D - W_C = \frac{C(\mathcal{E} - U_0)^2}{2} = 12{,}5\cdot 10^{-4}$ Дж.

5. $F_2 = 12$ см.

БИЛЕТ 6

1. 1) $v_2 = v + v_{2c} = v + \frac{x_0}{2}\sqrt{\frac{K}{3m}}$; 2) $t = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{3m}{K}}$.

2. $V = \frac{\Delta T}{\rho_в g} - V_л = \frac{\Delta T}{\rho_в g} - \frac{\rho_в}{\rho_в - \rho_л} S\Delta H$.

3. $A_{23} = A + \frac{4}{3} A_{12}$.

4. 1) $I_0 = \frac{U_R}{R} = \frac{U_0 - U_D}{R} = 40$ mA; 2) $U_{C_1} = U_D + I,\ R = 2$ В; 3) $W_D = W_1 + W_2 = 4 \cdot 10^{-4}$ Дж ($W_1 = U_D C(U_0 - U_{C_1})$, $W_2 = \frac{1}{2}\frac{CU_{C_1}^2}{2}$).

5. $l = F_2 - \frac{F_1 d}{F_1 - d} = 29$ см.

БИЛЕТ 7

1. Для ответа на первый вопрос рассмотрим систему тел, состоящую и двух муфт. Вдоль горизонтальной оси на данную систему внешние силы не действуют, а по вертикали сумма внешних сил равна нулю. Это означает, что в любой момент времени у данной системы будут сохраняться энергия и импульс. Пусть после отрыва муфты $4m$ от пружины она имеет скорость v_1, а муфта массой m — скорость v_2, и обе скорости направлены вдоль скорости v. Запишем законы сохранения

полной энергии и импульса наших муфт для двух моментов времени: когда муфта $4m$ неподвижна, а муфта массой m движется со скоростью v и после отрыва муфты $4m$ от пружины:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{4mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \quad (1)$$

$$mv = 4mv_1 + mv_2. \quad (2)$$

Совместное решение уравнений (1) и (2) позволяет найти v_1, равное

$$v_1 = \frac{2}{5}v.$$

Для ответа на второй вопрос удобно перейти в систему координат, связанную с центром масс нашей системы. Очевидно, что эта система будет двигаться со скоростью $v_{цм} = 1/5v$. В этой системе координат в момент касания пружины с муфтой $4m$ ее скорость будет равна $-1/5v$, а скорость муфты массой m равна $4/5v$. Обозначим длину недеформированной пружины через L. Тогда расстояние от муфты $4m$ до центра масс $l_1 = 1/5L$ а аналогичное расстояние от муфты массой m до центра масс $l_2 = 4/5L$. После соприкосновения пружины с муфтой $4m$ в системе центра масс обе муфты будут двигаться по гармоническому закону с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{K_1}{4m}} = \sqrt{\frac{K_2}{m}},$$

где K_1 — жесткость пружины длиной l_1 ($K_1 = \frac{LK}{l_1} = 5K$), а K_2 — жесткость пружины длиной l_2, ($K_2 = \frac{LK}{l_2} = \frac{5}{4}K$). Частота

$$\omega = \sqrt{\frac{5K}{4m}}.$$

Очевидно, что муфта $4m$ оторвется от пружины через время τ, равное половине периода колебаний T ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) муфт:

$$\tau = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{4m}{5K}}.$$

2. Натяжение нити до таяния льда равно разности выталкивающей

кивающей силы и силы тяжести шарика, вмороженного в лед: $T_1 = \rho_в g(V_л + V_ш) - \rho_л g V_л - \rho g V_ш = gV_л(\rho_в - \rho_л) + gV_ш(\rho_в - \rho)$, где $\rho_л$ — плотность льда, $V_л$ — объем льда, а $V_ш$ — объем шарика. После того как лед растаял, новое натяжение нити

$$T_2 = \rho_в g V_ш - \rho g V_ш = gV_ш(\rho_в - \rho).$$

Условие уменьшения натяжения нити в K раз имеет вид

$$\frac{T_1}{T_2} = K = \frac{V_л(\rho_в - \rho_л) + V_ш(\rho_в - \rho)}{V_ш(\rho_в - \rho)}. \qquad (3)$$

Уменьшение уровня воды в стакане после того как растаял лед, вызвана положительной разностью плотностей воды и льда $\rho_в - \rho_л > 0$. Масса растаявшего льда $m_л = \rho_л V_л$, объем воды растаявшего льда $V_в = \frac{m_л}{\rho_в} = \frac{\rho_л}{\rho_в} V_л$. Объем образовавшейся воды меньше объема льда на величину $\Delta V = V_л - V_в = V_л(1 - \rho_л/\rho_в)$. Это приводит к уменьшению уровня воды в стакане:

$$\Delta H \cdot S = \Delta V = V_л \frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_в}. \qquad (4)$$

Исключая из уравнений (3) и (4) объем льда $V_л$, получим, что объем шарика

$$V_ш = \frac{S \Delta H \rho_в}{(K-1)(\rho_в - \rho)}.$$

3. На участке 1–2 согласно первого начала термодинамики отводимое тепло

$$Q = \nu C_V(T_1 - T_2) + P_{1,2}(V_1 - V_2),$$

где ν — число молей гелия, C_V — молярная теплоемкость при постоянном объеме, T_1 и T_2 — температуры в точках 1 и 2. $P_{1,2}$ — давление при изобарическом процессе 1–2, V_1 и V_2 — объемы в состояниях 1 и 2. Используя уравнение состояния для идеального газа, можно записать:

$$Q = \nu C_V(T_1 - T_2) + \nu R(T_1 - T_2) = \nu(C_V + R)(T_1 - T_2).$$

Отсюда

$$T_1 - T_2 = Q/\nu(C_V + R). \qquad (5)$$

Работа, совершаемая газом на участке 2–3

$$A_{23} = \frac{P_3 + P_2}{2}(V_3 - V_2) = \frac{\nu R(T_3 - T_2)}{2}.$$

Здесь индексы 2, 3 соответствуют состояниям в точках 2 и 3. Из этого уравнения следует, что

$$T_3 - T_2 = 2A_{23}/\nu R. \qquad (6)$$

На участке 3–1 газ расширяется в адиабатическом процессе, и работа, совершаемая газом

$$A_{31} = \nu C_V(T_3 - T_1).$$

Для замкнутого цикла изменение внутренней энергии равно нулю. Это позволяет записать:

$$T_3 - T_1 = (T_3 - T_2) - (T_1 - T_2).$$

Используя соотношения (5) и (6), получим, что

$$T_3 - T_1 = \frac{2A_{23}}{\nu R} - \frac{Q}{\nu(C_V + R)}.$$

Тогда $A_{31} = \frac{2C_V}{R} \cdot A_{23} - \frac{C_V}{C_V + R} \cdot Q$. Поскольку $C_V = \frac{3}{2} R$, то $A_{31} = 3A_{23} - \frac{3}{5} Q$.

4. 1) Поскольку ЭДС батареи больше порогового напряжения диода ($\mathcal{E} > U_0$) то начальный ток в цепи $I_0 > 0$. По закону Ома для замкнутой цепи $\mathcal{E} = U_0 + I_0 R$. Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе равно нулю. Найдем начальный ток

$$I_0 = \frac{\mathcal{E} - U_0}{R} = 10^{-3} A.$$

2) После замыкания ключа конденсатор начнет заряжаться. Он будет заряжаться до напряжения $\mathcal{E} - U_0 = 2$ В. После этого ток в цепи будет равен нулю. Заряд, протекший через диод, очевидно, будет равен заряду на конденсаторе: $q = C(\mathcal{E} - U_0)$. Отсюда емкость конденсатора $C = q/(\mathcal{E} - U_0) = 200$ мкФ.

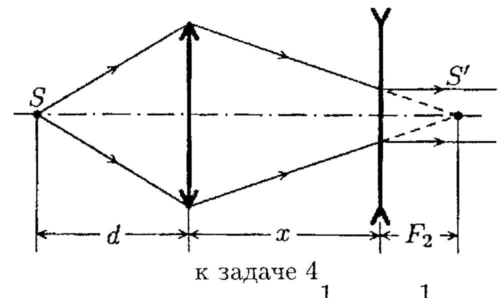
3) Работа, совершенная батареей $A = q\mathcal{E}$. Тепло, которое выделится на диоде

$$W_д = \int I U_0 \, dt = \int U_0 \, dq = U_0 q.$$

Конденсатор приобретет энергию $W_C = q^2/2C$. Тепло, выделившееся на резисторе R, будет равно

$$W_R = A - W_q - W_C = q\mathcal{E} - U_0 q - \frac{q(\mathcal{E} - U_0)}{2} = \frac{q(\mathcal{E} - U_0)}{2} = 4 \cdot 10^{-4} \text{Дж}.$$

5. Для того чтобы из системы линз вышел параллельный пучок света, необходимо, чтобы изображение источника S в собирающей линзе совпало с задним фокусом рассеивающей линзы (см. рис.).



к задаче 4

В этом случае можно записать для собирающей линзы формулу для тонкой линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{x + |F_2|} = \frac{1}{F_1}.$$

Отсюда

$$x = \frac{F_1 d}{d - F_1} - |F_2| = 50\text{см}.$$

БИЛЕТ 8

1. 1) $v_2 = v + x_0\sqrt{\frac{5k}{6m}}$; 2) $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{5m}{6k}}$.

2. $V = S\Delta H \frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{в} - \rho_\text{л}} - \frac{\Delta T}{\rho_\text{в} g} \frac{\rho_\text{л}}{\rho_\text{в} - \rho_\text{л}}$.

3. $A = \frac{4}{3} A_{23} - Q_{31}$.

4. 1) $I_0 = \frac{U_0 - U_D}{R} = 40$ mA; 2) $U_{C_1} = 2$ В;

3) $C = \dfrac{Q}{U_0 U_D - U_D U_{C_1} + \frac{U_{C_1}^2}{4}} = 50$ мкФ.

5. $F_2 = -15$ см.

МАТЕМАТИКА

БИЛЕТ 1

1. $(4;2)$, $(-4;-2)$.

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} = 16 + 2xy, & (1) \\ \frac{y^3}{x} = 50 - 6xy. & (2) \end{cases}$$

Перемножив почленно уравнения этой системы, получим уравнение

$$13(xy)^2 - 4xy - 800 = 0, \qquad (3)$$

которое вместе с одним из уравнений системы (1), (2) образует систему, равносильную системе (1), (2).

Из уравнения (3) находим

$$xy = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 10400}}{13} = \frac{2 \pm 102}{13}, \quad \text{т.е. } xy = 8 \text{ или } xy = -\frac{100}{3}.$$

Если $xy = 8$, то из уравнения (1) следует, что $x^4 = 2^8$, откуда $x_1 = 4$, $x_2 = -4$ и тогда $y_1 = 2$, $y_2 = -2$.

Если $xy = -\frac{100}{3}$, то $x^4 = -\frac{800}{169}$. Это уравнение не имеет действительных корней.

2. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Заметим, что

$$\sin 2x \neq 0 \qquad (4)$$

и воспользуемся равенствами

$$\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x} = \frac{\sin 8x \sin 6x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{16\cos 4x \sin 2x \cos 2x \sin 6x}{\sin^2 2x},$$

$$\cos 2x \sin 6x = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x) = \frac{1}{2}\sin 4x(1 + 2\cos 4x) = \\ = \sin 2x \cos 2x(1 + 2\cos 4x).$$

Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$\frac{16\cos 4x \sin^2 2x \cos 2x(1 + 2\cos 4x)}{\sin^2 2x} = 16\cos 4x(1 + 2\cos 4x). \qquad (5)$$

Уравнение (5) при условии (4) равносильно уравнению

$$\cos 4x(1+2\cos 4x)\cos 2x = \cos 4x(1+2\cos 4x), \qquad (6)$$

а уравнение (6) равносильно совокупности уравнений

$$\cos 4x = 0, \qquad (7)$$

$$\cos 4x = -\frac{1}{2}, \qquad (8)$$

$$\cos 2x = 1. \qquad (9)$$

Уравнения (7) и (8) имеют корни $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$ и $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ соответственно, и эти корни удовлетворяют условию (4), а из (9) следует, что $\sin 2x = 0$.

3. $\frac{1}{8} < x < \frac{1}{2}$, $x \geqslant 1$, $x \neq 2$.

Р е ш е н и е. Полагая $\log_2 x = t$ и учитывая, что $x > 0$, $\log_4 x^2 = \log_2 x$ (при $x > 0$), преобразуем исходное неравенство к виду

$$\frac{1}{|t+1|-2} \leqslant \frac{1}{|t|-1}. \qquad (10)$$

Рассмотрим три возможных случая: $t \leqslant -1$, $-1 < t < 0$, $t \geqslant 0$.

1. При $t \leqslant -1$ неравенство (10) равносильно каждому из неравенств $\frac{1}{-t-3} \leqslant \frac{1}{-t-1}$, $\frac{1}{t+3} \geqslant \frac{1}{t+1}$, $\frac{2}{(t+3)(t+1)} \leqslant 0$, откуда $-3 < t < 1$, т.е. $-3 < \log_2 x < -1$, $\frac{1}{8} < x < \frac{1}{2}$.
2. Если $-1 < t < 0$, то из (10) следует, что $\frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{-t-1}$ или $\frac{2t}{(t+1)(t-1)} \leqslant 0$, откуда $t < -1$ или $0 \leqslant t < 1$. В этом случае неравенство (10) не имеет решений.
3. При $t \geqslant 0$ из (10) следует, что $\frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{t-1}$. Это неравенство является верным при всех $t \geqslant 0$, кроме $t = 1$, т.е. при $x \geqslant 1$ и $x \neq 2$.

4. $\frac{27\sqrt{2}}{8}$.

Р е ш е н и е. Пусть BK и AF — высоты в треугольнике ABC (см. рис.) и пусть $\angle ABK = \angle CBK = \alpha$, тогда $\angle FAC = \alpha$, $\angle DBE = \angle DAE = \alpha$ (эти углы опираются на одну и ту же дугу).

Из равенства прямоугольных треугольников DAF и CAF следует, что $AD = AC$. Найдем AC, пользуясь тем, что треугольники ADC и ABC подобны. Получим $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$, откуда $AC^2 = 4 \cdot 9$, $AC = 6$, $\sin\alpha = \frac{KC}{BC} = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Пусть R — радиус окружности, тогда $\frac{AD}{\sin 2\alpha} = 2R$, где $AD = 6$, $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, и поэтому $R = \frac{27\sqrt{2}}{8}$.

к задаче 4

5. $a < 0$, $a = 1$.

Р е ш е н и е. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$1 + ax = 2\sqrt{x} \qquad (11)$$

при условиях

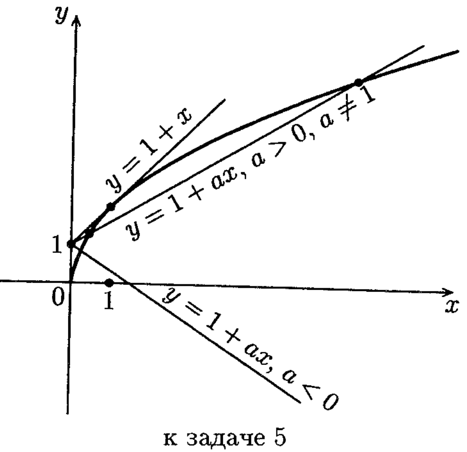
$$x > 0, \quad x \neq \frac{1}{4}. \qquad (12)$$

Полагая $\sqrt{x} = t$, запишем уравнение (12) в виде

$$at^2 - 2t + 1 = 0. \qquad (13)$$

Если $a = 0$, то $t = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$ и не выполняется второе из условий (12).

Пусть $a \neq 0$, тогда уравнение (13) является квадратным и имеет действительные корни тогда и только тогда, когда $D = 4 - 4a \geqslant 0$, т.е. при $a \leqslant 1$.



к задаче 5

Если $D = 0$ ($a = 1$), то уравнение (13) имеет единственный положительный корень $t = 1$, а уравнение (11) имеет единственный

корень $x = 1$, удовлетворяющий условиям (12).

Пусть $D > 0$ ($a < 1$), тогда уравнение (13) имеет два действительных и различных корня. Так как $t = \sqrt{x} \geqslant 0$, то задача в случае $D > 0$ сводится к нахождению тех значений a, при которых уравнение (13) имеет один положительный корень (другой корень отрицателен), т.е. имеет действительные корни разных знаков. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда $D > 0$, $\frac{1}{a} < 0$, т.е. при $a < 1$ и $a < 0$. Итак, в этом случае $a < 0$.

Приведем другое решение этой задачи, используя графики функций $y = 1 + ax$ и $y = 2\sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$ (см. рис.).

Требуется найти все значения a, при которых эти графики имеют единственную общую точку и при этом выполняются условия (12).

Если $a < 0$, то прямая $y = 1 + ax$ пересекает параболу $y = 2\sqrt{x}$ в единственной точке.

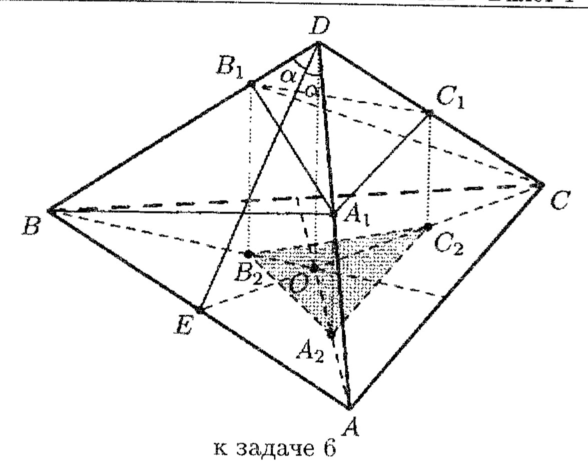
Если $a = 0$, то из уравнения (11) получаем $x = \frac{1}{4}$ (не выполняются условия (12)).

Пусть $a > 0$, тогда прямая $y = 1 + ax$ имеет единственную общую точку с параболой только в том случае, когда она касается параболы. В этом случае уравнение (13) имеет единственный корень ($D = 0$, $a = 1$). При $0 < a < 1$ прямая $y = 1 + ax$ пересекает параболу $y = 2\sqrt{x}$ в двух точках, а при $a > 1$ прямая и парабола не имеют общих точек.

6. $\frac{84\sqrt{39}}{55}$, $\frac{1632\sqrt{3}}{275}$.

Решение. 1) Пусть E — середина AB, $\angle BDE = \angle ADE = \alpha$ (см. рис.), тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $AD = BD = \frac{BE}{\sin\alpha} = 10$. По свойству биссектрисы $\frac{DA_1}{AA_1} = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{6}$, откуда $\frac{DA_1}{DA} = \frac{5}{11}$.

Из подобия треугольников BCB_1 и DBE следует, что $\frac{BB_1}{BC} = \frac{BE}{BD}$ или $\frac{BB_1}{12} = \frac{6}{10}$, откуда $BB_1 = \frac{36}{5}$, $DB_1 = \frac{14}{5}$, $\frac{DB_1}{DB} = \frac{7}{25}$.



к задаче 6

По условию $DC_1 = CC_1$ и поэтому $\frac{DC_1}{DC} = \frac{1}{2}$.

Найдем высоту DO пирамиды $ABCD$. Так как $BO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$, $BD = 10$, то $DO = \sqrt{BD^2 - BO^2} = 2\sqrt{13}$, а объем пирамиды $ABCD$ равен

$$V = \frac{1}{3}AB^2\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot DO = 24\sqrt{39}.$$

Пусть V_1 — объем пирамиды $A_1B_1C_1D_1$, $\frac{DA_1}{DA} = p$, $\frac{DB_1}{DB} = q$, $\frac{DC_1}{DC} = r$, тогда $V_1 = Vpqr = 24\sqrt{39} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{7}{25} \cdot \frac{1}{2} = \frac{84\sqrt{39}}{55}$.

2) Вычислим площадь S проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC. Пусть A_2, B_2, C_2 — проекции точек A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 лежат на соответствующих высотах треугольника ABC. По теореме Фалеса $\frac{OC_2}{OC} = \frac{DC_1}{DC} = r$, откуда $OC_2 = r \cdot 4\sqrt{3}$. Аналогично, $OA_1 = p \cdot 4\sqrt{3}$, $OB_1 = q \cdot 4\sqrt{3}$. Следовательно, $S = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}(OA_1 \cdot OB_1 + OB_1 \cdot OC_1 + OC_1 \cdot OA_1) = \frac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{3})^2\left(\frac{5}{11} \cdot \frac{7}{25} + \frac{7}{25} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11}\right) = \frac{1632\sqrt{3}}{275}$.

БИЛЕТ 2

1. $(4;2)$, $(-4;-2)$.

2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $x = \frac{\pi k}{10}$, $k \neq 5p$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$.

3. $0 < x < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} < x \leqslant 1$, $4 < x < 16$.

4. $\frac{16\sqrt{6}}{25}$.

5. $a = -\frac{1}{2}$, $a > 0$.

6. $\frac{3\sqrt{11}}{28}$, $\frac{20\sqrt{3}}{21}$.

БИЛЕТ 3

1. $(2;4)$, $(-2;-4)$.

2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. $\frac{1}{243} < x < \frac{1}{3}$, $1 \leqslant x < 3$, $x > 3$.

4. $\frac{27\sqrt{2}}{16}$.

5. $a < 0$, $a = \frac{9}{4}$.

6. $\frac{21\sqrt{39}}{880}$, $\frac{102\sqrt{3}}{275}$.

БИЛЕТ 4

1. $(2;4)$, $\left(\frac{256}{375}; -\frac{2048}{3825}\right)$.

2. $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \neq 3k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $\frac{1}{9} < x < 1$, $x \geqslant 3$, $x \neq 9$.

4. $\frac{27\sqrt{2}}{4}$.

5. $a = -\frac{3}{4}$, $a > 1$.

6. $\frac{6\sqrt{11}}{7}$, $\frac{80\sqrt{3}}{21}$.

БИЛЕТ 5

1. $-2 \leqslant x < 2 - \sqrt{2}$, $\frac{4}{3} < x \leqslant 3$.

Р е ш е н и е. Так как неравенство $|f(x)| > |g(x)|$ равносильно каждому из неравенств $f^2(x) > g^2(x)$, $(f(x)+g(x))(f(x)-g(x)) > 0$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} -x^2 + x + 9 \geqslant 0, \\ (2x^2 - 8x + 4)(-6x + 8) > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Квадратный трехчлен $-x^2 + x + 6$ имеет корни -2 и 3, корнями квадратного трехчлена $x^2 - 4x + 2$ являются числа $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 2 + \sqrt{2}$, а система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} (x+2)(x-3) \leqslant 0, & (2) \\ (x - x_1)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x - x_2) < 0, & (3) \end{cases}$$

где $-2 < x_1 < \frac{4}{3} < 3 < x_2$ (см. рис.).

Множество E_1 решений неравенства (2) — отрезок $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Множество E_2 решений неравенства (3), определяемое методом интервалов, является объединением интервалов $x < x_1$ и $\frac{4}{3} < x < x_2$, а множество решений системы (2), (3) — пересечение множеств E_1 и E_2 (см. рис.).

к задаче 1

2. $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Р е ш е н и е. Используя формулу $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$, преобразуем исходное уравнение к виду

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} 3x = \sin 4x - \operatorname{tg} 2x. \qquad (4)$$

Область допустимых значений x для уравнения (4) определяется условиями

$$\cos 2x \neq 0, \quad \cos 3x \neq 0, \quad \cos 4x \neq 0, \qquad (5)$$

а при выполнении условий (5) исходное уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} 4x = \sin 4x. \qquad (6)$$

Уравнение (6) равносильно совокупности уравнений

$$\sin 4x = 0, \qquad (7)$$

$$\cos 4x = 1, \qquad (8)$$

причем все корни уравнения (8) содержатся среди корней уравнения (7). Из (7) следует, что либо $\sin x = 0$, и тогда $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = 0$ (и тогда $\cos 3x = 0$), либо $\cos 2x = 0$.

3. $(3;0)$, $\left(\frac{1459}{27}; -\frac{728}{27}\right)$.

Р е ш е н и е. Исходную систему запишем в виде

$$\begin{cases} [\log_3(x-y) - \log_3(x+2y)]\,[\log_3(x-y) + 2\log_3(x+2y)] = 0, & (9)\\ (x-y)(x+2y) = 9. & (10)\end{cases}$$

Из (1) следует, что либо

$$x - y = x + 2y, \qquad (11)$$

либо

$$(x-y)(x+2y)^2 = 1. \qquad (12)$$

Если выполнены условия

$$x - y > 0, \quad x + 2y > 0, \qquad (13)$$

то система (9), (10) равносильна совокупности систем (11), (10) и (12), (10). Первая из этих систем имеет единственное решение $(3;0)$, удовлетворяющее условиям (13), а вторая система, равносильная системе

$$\begin{cases} x + 2y = \frac{1}{9},\\ x - y = 81,\end{cases}$$

для которой выполняются условия (13), имеет решение $\left(\frac{1459}{27}; -\frac{728}{27}\right)$.

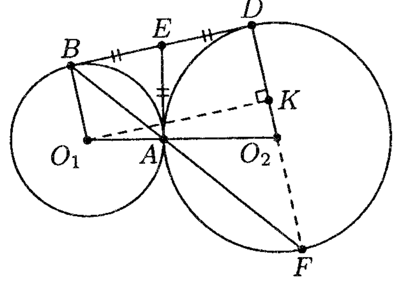
4. $\sqrt{\frac{10}{3}}$, $\sqrt{\frac{15}{2}}$.

Р е ш е н и е. Заметим, что $AE = BE$ и $AE = DE$, так как касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны. Поэтому $BD = 2BE = 2\sqrt{5}$ (см. рис.). Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей C_1 и C_2, $O_1B = O_1A = x$, $O_2F = O_2A = y$, $AB = t$.

По теореме о касательной и секущей

$$AB(AB + AF) = BD^2, \quad \text{т.е.}$$

$t(t + 3\sqrt{2}) = 20$ или $t^2 + 3\sqrt{2}t - 20 = 0$, откуда $t_1 = -5\sqrt{2}$, $t_2 = 2\sqrt{2}$, т.е. $AB = 2\sqrt{2}$.



к задаче 4

Из подобия треугольников O_1AB и O_2AF следует, что $\frac{x}{t} = \frac{y}{3\sqrt{2}}$, откуда $x = \frac{2}{3}y$.

Для получения еще одного уравнения, связывающего x и y, воспользуемся теоремой Пифагора в треугольнике O_1O_2K, где K — основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на прямую DO_2. Получим $O_1K = BD = \sqrt{(x+y)^2 - (y-x)^2} = 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{5}$, откуда $xy = 5$, где $x = \frac{2}{3}y$. Следовательно, $y^2 = \frac{15}{2}$, $y = \sqrt{\frac{15}{2}}$, $x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{15}{2}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

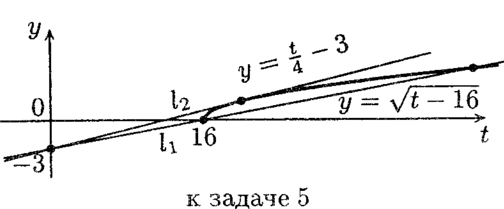
З а м е ч а н и е. Можно показать, что точки D, O_2 и F лежат на одной прямой и вместо теоремы о касательной и секущей применить теорему Пифагора к треугольнику BDF.

5. $0 < a < \frac{3}{16}$, $a = \frac{1}{4}$.

Р е ш е н и е. Полагая $x + 7 = t$, получим уравнение

$$\sqrt{t - 16} = at - 3. \qquad (14)$$

Требуется найти все значения a, при которых графики функций $y = \sqrt{t-16}$ и $y = at - 3$ имеют при $t \geqslant 16$ единственную общую точку (см. рис.).



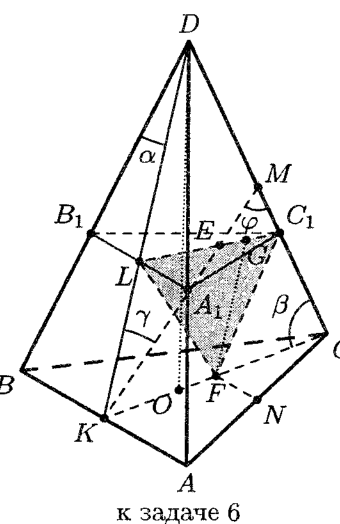
к задаче 5

Если $a \leqslant 0$, то прямая $y = at - 3$ не имеет общих точек с параболой $y = \sqrt{t-16}$. Заметим, что угловой коэффициент прямой $y =$

$= at-3$ равен a. Найдем угловые коэффициенты a_1 и a_2 прямых l_1 и l_2 (обе задаются уравнением вида $y = at - 3$), первая из которых проходит через точку $(16;0)$, а вторая касается параболы $y = \sqrt{t-16}$. Подставляя в уравнение $y = 3 - at$ значения $t = 16$, $y = 0$, находим $a_1 = \frac{3}{16}$.

Число a_2 является тем значением a, при котором уравнение (14) имеет единственный корень $t_1 > 16$. Возводя обе части (14) в квадрат, получаем уравнение $a^2t^2 - (6a+1)t + 25 = 0$, дискриминант которого $D = (6a+1)^2 - (10a)^2$. Уравнение $D = 0$ имеет единственный положительный корень $a = \frac{1}{4}$. Следовательно, $a_2 = \frac{1}{4}$. Если $\frac{3}{16} \leqslant a < \frac{1}{4}$, то прямая $y = at - 3$ и парабола $y = \sqrt{t-16}$ имеют две общих точки, а при $a > \frac{1}{4}$ они не имеют общих точек.

6. $\frac{A_1D}{AD} = \frac{B_1D}{BD} = \frac{7}{12}$, $\frac{C_1D}{CD} = \frac{21}{32}$; $\frac{49\sqrt{65}}{576}$; $\frac{13}{2\sqrt{10}}$.



к задаче 6

Р е ш е н и е. Пусть $\angle KDA = \alpha$, $\angle KCD = \beta$, $\angle DKM = \gamma$, $\angle KMC = \varphi$ (см. рис.). Так как $\sin\alpha = \frac{1}{6}$, $AK = 1$, то $AD = BD = CD = 6$, $DM = 3$, $KD = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$. Если O — центр треугольника ABC, то $OC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta = \frac{OC}{DC} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}}$.

Применяя теорему косинусов в треугольниках KMC и KDM, получаем

1. $KM^2 = KC^2 + MC^2 - 2KC\cdot MC\cdot\cos\beta = 3 + 9 - 2\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}} = 10$, откуда $KM = \sqrt{10}$, $KE = \frac{3}{4}KM = \frac{3\sqrt{10}}{4}$, $ME = \frac{1}{4}KM = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

2. $\cos\varphi = \frac{KM^2 + MC^2 - KC^2}{2KM\cdot MC} = \frac{10+9-3}{6\sqrt{10}} = \frac{8}{3\sqrt{10}}$, откуда $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1} = \frac{\sqrt{26}}{8}$.

3. $\cos\gamma = \frac{KD^2 + KM^2 - DM^2}{2KD\cdot KM} = \frac{35+10-9}{2\sqrt{35}\cdot\sqrt{10}} = \frac{9}{5}\sqrt{\frac{2}{7}}$, откуда $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{13}}{9\sqrt{2}}$.

Пусть A_1, B_1 — точки пересечения плоскости $\mathcal{P}$ с ребрами AD и BD. Так как $KM \perp AB$ ($BM = AM$) и $KM \perp A_1B_1$ (KM — перпендикуляр к плоскости $\mathcal{P}$), то $A_1B_1 \parallel AB$. Если C_1 — точка пересечения плоскости $\mathcal{P}$ и прямой DC, то $A_1B_1C_1$ — равнобедренный треугольник ($A_1C_1 = B_1C_1$). Покажем, что точка C_1 лежит на ребре DC, а не на его продолжении за точку C_1, вычислив длину DC_1. Пусть L — середина A_1B_1, тогда $C_1L \perp KM$, так как KM — перпендикуляр к плоскости $\mathcal{P}$. Из прямоугольных треугольников LEK и MEC_1 находим

1. $LK = \frac{KE}{\cos\gamma} = \frac{3\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{5\sqrt{7}}{9\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{35}}{12} = \frac{5}{12}KD$, откуда $DL = \frac{7}{12}KD$, $LE = KE\cdot\operatorname{tg}\gamma = \frac{3\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{\sqrt{13}}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{65}}{12}$;

2. $MC_1 = \frac{ME}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{8} = \frac{15}{16}$, откуда следует, что точка C_1 лежит на ребре CD, причем $DC_1 = 3 + \frac{15}{16} = \frac{63}{16}$, $\frac{DC_1}{DC} = \frac{21}{32}$.

Таким образом, в сечении пирамиды плоскостью $\mathcal{P}$ получается равнобедренный треугольник $A_1B_1C_1$. Далее находим $EC_1 = ME\cdot\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{\sqrt{26}}{8} = \frac{\sqrt{65}}{16}$. Из подобия треугольников DLA_1 и DKA следует, что

$$\frac{A_1L}{AK} = \frac{DA_1}{DA} = \frac{DL}{DK} = \frac{7}{12},$$

откуда $A_1L = \frac{7}{12}$.

Пусть S — площадь треугольника $A_1B_1C_1$, тогда

$$S = A_1L \cdot LC_1 = A_1L(LE + EC_1) = \frac{7}{12}\left(\frac{\sqrt{65}}{12} + \frac{\sqrt{65}}{16}\right) = \frac{49\sqrt{65}}{576}.$$

Найдем, наконец, расстояние d от точки N до плоскости $\mathcal{P}$. Проведем через точку N прямую, параллельную AB и пересекающую KCв точке F (F — середина KC). Так как $NF \parallel AB$, а $AB \parallel A_1B_1$, то расстояние от точки F до плоскости $\mathcal{P}$ равно d.

Заметим, что высота FG, проведенная из точки F в треугольнике FLC_1, равна d ($FG \perp LC_1$ и $FG \perp A_1B_1$).

Для нахождения d достаточно найти площадь S_0 треугольника FLC_1. Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 — площади треугольников KDC, LKF, FCC_1 и DLC_1 соответственно. Тогда

$$S_1 = \frac{1}{2}DC \cdot KC \cdot \sin\beta = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}} = \sqrt{26},$$

$$S_2 = \frac{5}{12} \cdot \frac{S_1}{2} = \frac{5}{24}S_1, \quad S_3 = \frac{11}{32} \cdot \frac{S_1}{2} = \frac{11}{64}S_1, \quad S_4 = pqS_1,$$

где $p = \frac{DL}{DK} = \frac{7}{12}$, $q = \frac{DC_1}{DC} = \frac{21}{32}$, т.е. $S_4 = \frac{49}{128}S_1$. Следовательно, $S_0 = S_1\left(1 - \frac{5}{24} - \frac{11}{64} - \frac{49}{128}\right) = S_1\frac{13 \cdot 7}{64 \cdot 6}$,

$$d = \frac{2S_0}{LC_1} = \frac{13}{2\sqrt{10}}.$$

БИЛЕТ 6

1. $1 \leqslant x < 2$, $2 + \sqrt{3} < x \leqslant 6$.

2. $x = \frac{\pi n}{8}$, $n \neq 2 + 4k$, $n \neq 4 + 8k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $(2; 0)$, $\left(\frac{43}{4}; \frac{21}{4}\right)$.

4. $2\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

5. $0 \leqslant a \leqslant \frac{3}{16}$, $a = -\frac{1}{16}$.

6. $\frac{A_1D}{AD} = \frac{B_1D}{BD} = \frac{5}{6}$, $\frac{C_1D}{CD} = \frac{5}{11}$; $\frac{25\sqrt{23}}{99}$; $\frac{7}{8}$.

БИЛЕТ 7

1. $-5 \leqslant x < -2 - \sqrt{2}$, $-\frac{4}{3} < x \leqslant -1$.

2. $x = \frac{\pi n}{8}$, $n \neq 2 + 4k$, $n \neq 4 + 8k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $(2; 0)$, $\left(\frac{11}{2}; \frac{21}{4}\right)$.

4. $\frac{3}{\sqrt{2}}$, $3\sqrt{2}$.

5. $a = \frac{1}{2}$, $0 < a < \frac{2}{5}$.

6. $\frac{A_1D}{AD} = \frac{B_1D}{BD} = \frac{17}{27}$, $\frac{C_1D}{CD} = \frac{17}{24}$; $\left(\frac{17}{27}\right)^2\sqrt{65}$; $\frac{34}{3\sqrt{10}}$.

БИЛЕТ 8

1. $-3 \leqslant x < -2$, $-2 + \sqrt{3} < x \leqslant 1$.

2. $x = \frac{\pi n}{6}$, $n \neq 3 + 6k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $(3; 0)$, $\left(\frac{731}{27}; -\frac{728}{27}\right)$.

4. $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. $0 \leqslant a \leqslant \frac{2}{5}$, $a = -\frac{1}{10}$.

6. $\frac{A_1D}{AD} = \frac{B_1D}{BD} = \frac{13}{18}$, $\frac{C_1D}{CD} = \frac{13}{33}$; $\left(\frac{26}{9}\right)^2\frac{\sqrt{23}}{11}$; $\frac{25}{12}$.